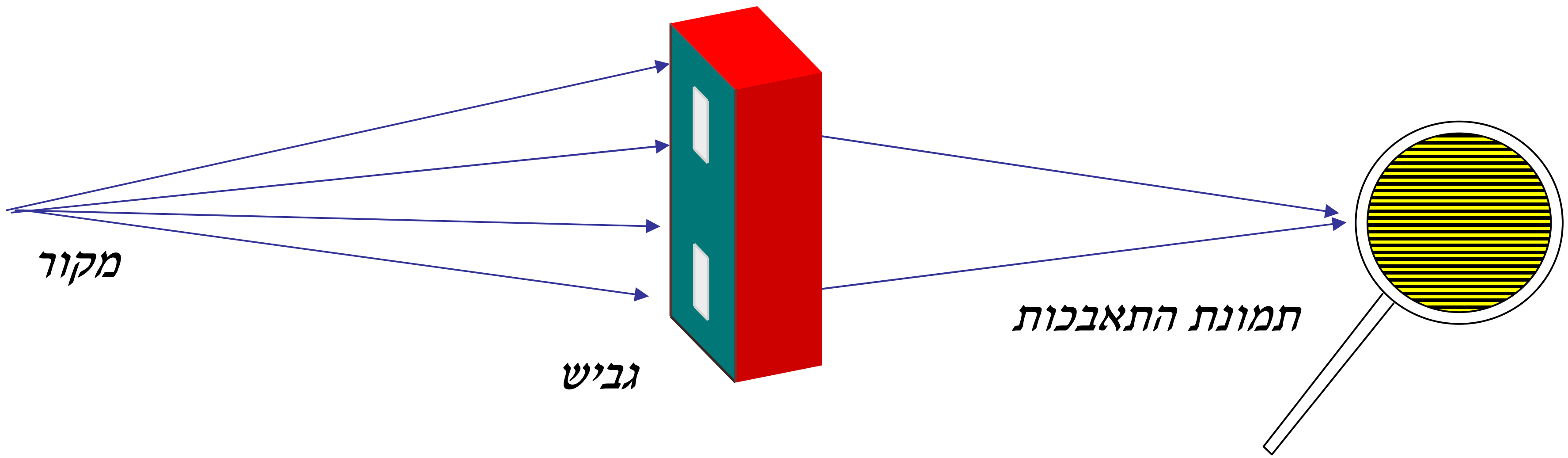
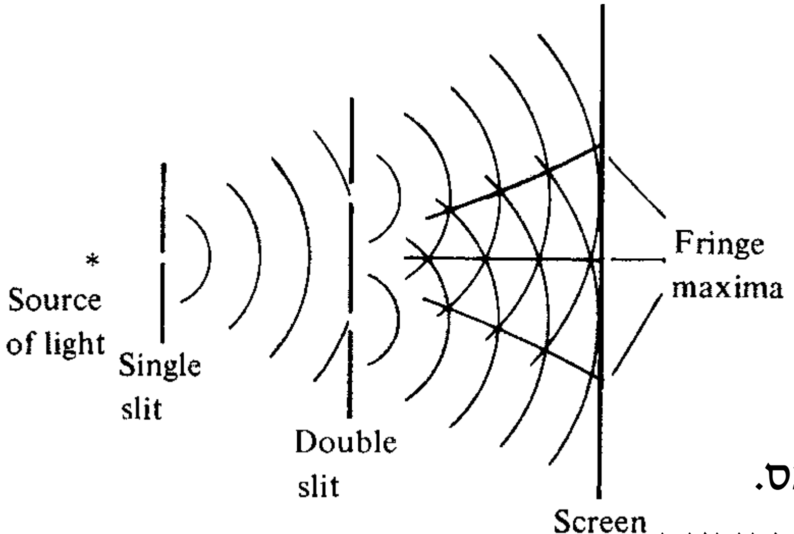
התאבכות: הקדמה



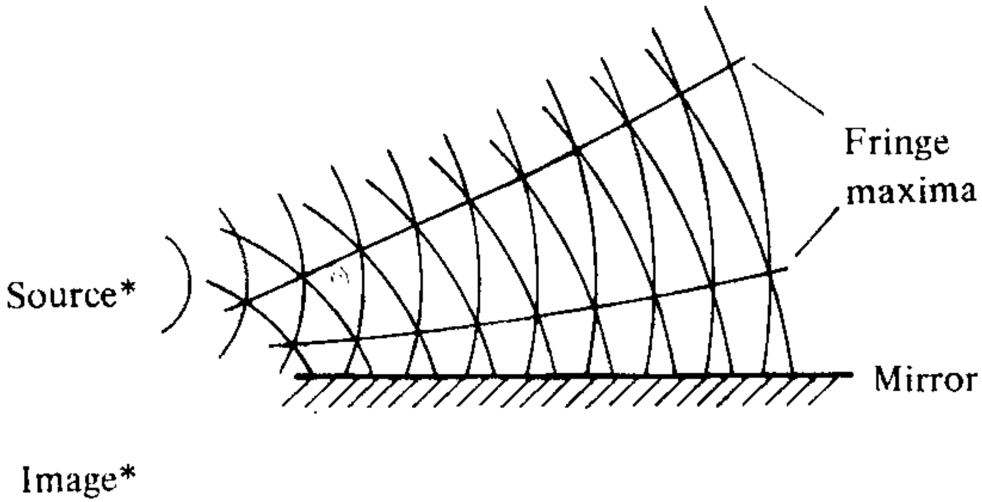
- מבדילים בעיקר בין עקיפה והתאבכות במספר הקרנים הבדידות או הרציפות המגיעות לתמונת העקיפה.
- קיימת התאבכות בין הקרנים אם הן קוהרנטיות אחת לרעותה.
- במקרה כזה מחברים את השדה המרוכב, והעוצמה היא המשרעת הכוללת בריבוע.
- אם הקרנים לא קוהרנטיות, מחשבים קודם את העוצמות, ומחברים אותן.
- קוהרנטיות בתחום הנראה דורשת מקור משותף, וניתן לקבל התאבכות בין הקרנים באמצעות אינטרפרומטרים שונים.

פסי יאנג



- זהו האינטרפרומטר הבסיסי והראשון. ננתח אותו לפי הויגנס.
- כל חור משמש כמקור של גלים קוהרנטיים וחזיתות הגלים כדוריות.
- בתבנית ההתאבכות קיימות עוצמות גבוהות ונמוכות במקום שהגלים מתאבכים בצורה בונה (המשרעות מתחברות) או הורסת (המשרעות מתחסרות).
- כאשר אין הבדל בין הסדקים, הקרנים עוזבות אותם באותו מופע.
- במקרה זה ההתאבכות הבונה קורה כאשר יש הבדל בין מסלולי הקרנים בשיעור מחזור שלם.
- התאבכות הורסת קורה כאשר ההפרש הוא מספר שלם של מחזורים ועוד חצי מחזור.
- מיקום נקודות אלו נמצא על משפחת היפרבולות שמוקדיהן בשני הסדקים.
- אם הסדקים מוחלפים בחרירים, מיקום הפסים בשלושה מימדים היא משפחת היפרבולואידים כנ"ל.
- פגישתם של ההיפרבולואידים עם מסך שטוח במרחק גדול נותנת בקירוב קוים ישרים.

אינטרפרומטר לויד



- דרך פשוטה לקבל שני מקורות קוהרנטיים היא באמצעות מקור נקודתי ודמותו במראה. זוהי מראת לויד (Lloyd).
- אם המקור במישור המראה, ההפרדה של המקור ושל דמותו קטנה מאוד, ומקבלים פסי התאבכות מופרדים היטב.
- הפס המרכזי, שמרחקו שווה משני המקורות, לא קיים. בהמשכה אחורה, מקבלים במרכז דווקא מינימום עוצמה, בגלל חוסר סימטריה הנובע משינוי מופע בהחזרה ממתכת או מחומר בעל מקדם שבירה גובה יותר.
- באינטרפרומטריה אסטרונומית בגלי רדיו נעשה שימוש במראת לויד, בהחזרה מפני הים.

אינטרפרומטר יאנג

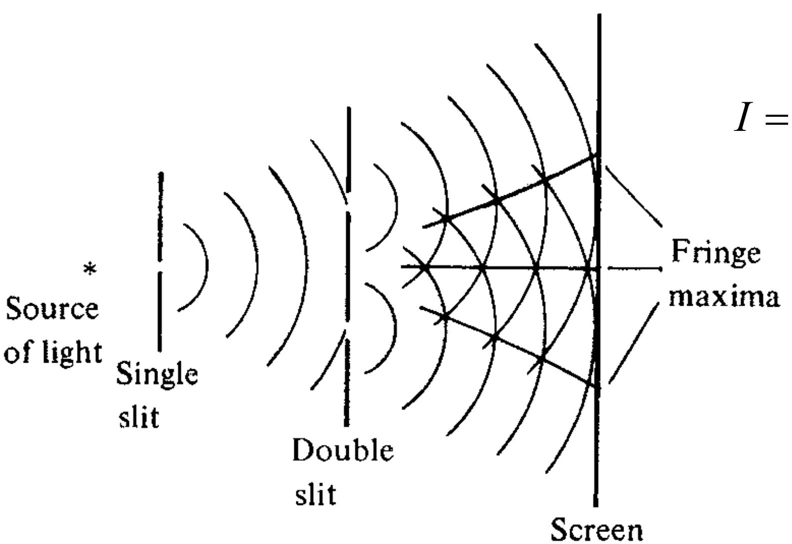
- ננסה לחשב את ההפרדה בצבע באינטרפרומטר יאנג. נתיחס לפתחים כפונקציות δ במרחק a.
- המשרעת במסך מרוחק תהיה $\psi(u) = 2\cos(u\,a/2)$. נחליף ליחידות זוית על ידי $u = k_0 \sin\theta$ ונקבל

$$\psi(\sin\theta) = 2\cos\left(k_0 a \sin\theta/2\right)$$

$$I = \left|\psi(\sin\theta)\right|^2 = 4\cos^2\left(k_0 a \sin\theta/2\right)$$

- ניקח כעת שני וקטורי גל שונים באורכי גל שונים, שאינם יכולים להיות קוהרנטיים זה עם זה. נקבל את תרומתם המשותפת

$$I = 4\left[\cos^2\left(k_1 a \sin\theta/2\right) + \cos^2\left(k_2 a \sin\theta/2\right)\right]$$



- הפסים יתמצעו והעצמה תהיה אחידה כאשר

$$k_1 a \sin\theta/2 - k_2 a \sin\theta/2 = (2n+1)\pi/2$$

הפרדה באינטרפרומטר יאנג

$$k_1 a \sin\theta/2 - k_2 a \sin\theta/2 = (2n+1)\pi/2$$

- אם אנו דורשים הפרדה באורך גל חייבת להיות אחידות פסים כזאת כאשר $\theta < \pi/2$, או כאשר

$$k_1 - k_2 > \pi/a$$

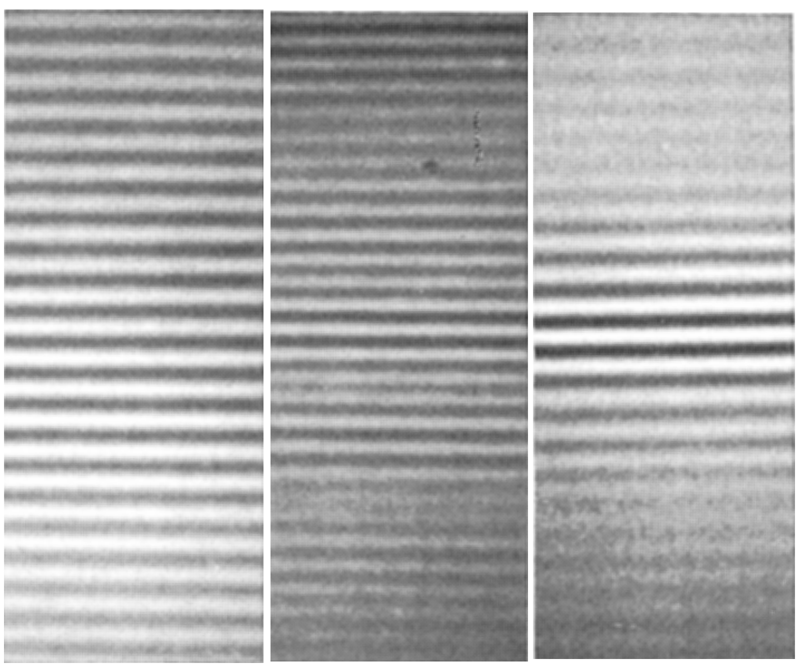
- אם וקטורי הגל קרובים, נקבל

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda} > \frac{\lambda}{a}\ ;\ \lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

- זהו גבול ההפרדה. היפוכו יהיה כושר ההפרדה

$$\frac{\lambda}{\lambda_1 - \lambda_2} < \frac{a}{\lambda}$$

- למשל נציב $a = 1$ mm, $\lambda = 0.5$ μm.
- נקבל כושר הפרדה של 4000.
- קיימים אמצעים טובים יותר להפרדה טובה בהרבה.



פס רחב   מנורת כספית   פס צר

סריג עקיפה

- סריג עקיפה מכיל מספר רב ביותר של מפתחים צרים, כגון מראות או סדקים, מסודרים מחזורית על קו.
- העקיפה מסריג כזה תהיה סדרה מחזורית של פונקציות δ שחוזקן נקבע לפי הצורה ומימדי הסדקים.
- מיקומן של פונקציות ה- δ נקבע רק על פי מחזור המערך d.

$$u = k_0\left(\sin\theta - \sin\theta_0\right) = 2\pi\left(\sin\theta - \sin\theta_0\right)/\lambda = u_m = 2\pi m/d$$

- סדר העקיפה m קובע את הזוית בה תתפזר הקרן.

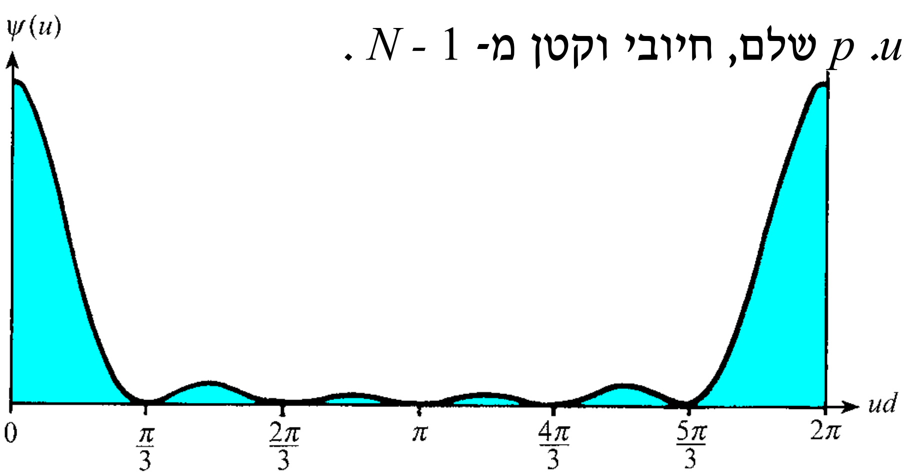
- סריגי עקיפה מדויקים מיוצרים ע"י שריטה ביהלום וחזרה על ידי בורג מחריץ לחריץ.
- נדרש דיוק מכני ותרמי רב ליצור כזה.
- כיום מייצרים סריגי עקיפה טובים מאוד על ידי שחזור בפלסטיק של מטריצה מדויקת.
- ניתן להשתמש בהולוגרמות כסריגי עקיפה. אלו סריגים מסובכים ביותר על סרט צילום.
- צפיפות סרט הצילום גבוהה. עבור אורך גל בנראה וזוית סטיה של 30^0x2 מקבלים $\lambda / \sin\alpha = 1\mu\mathrm{m}$.
- בגלל שיטת הייצור, מתוך צילום של המקור הנקודתי, אין שגיאות בקרן המפוזרת.
- אם יש עיוותים באופטיקה, הצילום ההולוגרפי יכול גם לתקן אותם.
- סריגי עקיפה מחזירים, שבהם יש שינוי במופע, יעילים יותר ועל כן מדויקים יותר.

כח הפרדה

- כיון שסריגים משמשים למדידת תלות העוצמה באורך הגל, המשתנה החשוב בהם הוא כוח ההפרדה.
- כוח ההפרדה נקבע כמרחק הקטן ביותר בין שני אורכי גל שבו עדין נקבל שני שיאים נפרדים.
- ראינו בסריג סופי שקיימת תבנית התאבכות מחזורית מתוך N מפתחים מחזוריים.
- בתבנית זו היו שיאים עיקריים ומשניים. קיימים $N - 1$ אפסים בין השיאים.
- נשאל מתי שני אורכי גל יצרו תבנית סכום שבה ניתן יהיה להפריד בין השיאים.
- העוצמה (מנורמלת ל-1 בראשית) היא

$$I(u,v) = |\psi(u,v)|^2 = \frac{\sin^2(uNd/2)}{N^2 \sin^2(ud/2)}$$

- השיאים העיקריים שבהם העוצמה היא שוב 1 נמצאים במיקומים $u = 2\pi/d$.
- האפסים נמצאים במיקומים $u = 2(m + p/N)\pi/d$. p שלם, חיובי וקטן מ- $N - 1$.



כושר הפרדה

- כאשר יש שני אורכי גל, מחברים את עוצמותיהם.
- אורכי הגל מופרדים כאשר בגל אחד השיא העיקרי חופף לאפס שלפניו באורך גל הקרוב (אבן הבוחן של ריילי, Rayleigh).
- נציב אם כך $p = 1$ בנוסחה $u = 2\,(m + p\,/\,N)\,\pi\,/\,d$. ההפרש בין המיקומים הוא $\delta u = 2\,\pi\,/\,N\,d$.

$$\frac{\delta u}{u} = \frac{\delta k}{k} = -\frac{\delta\lambda}{\lambda}$$

- כושר ההפרדה עבור סדר m הוא

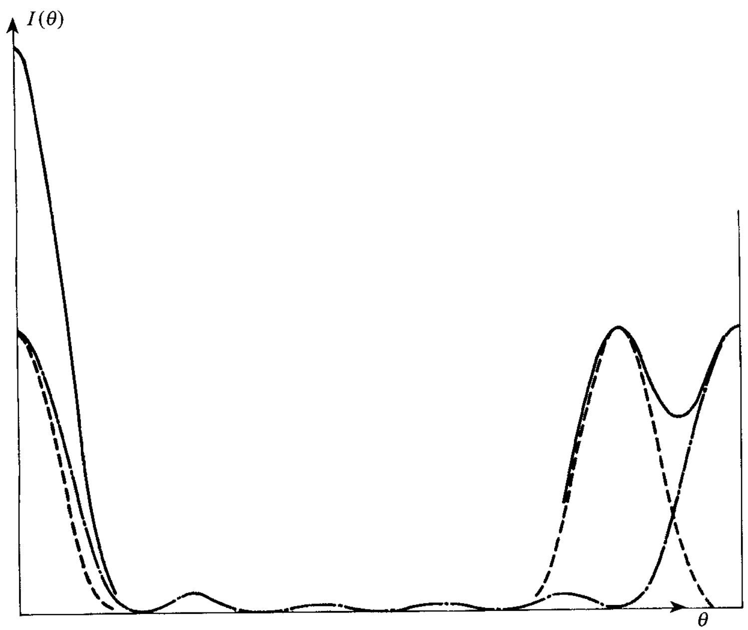
$$\frac{\delta\lambda}{\lambda_{\min}} = \frac{uNd}{2\pi} = mN$$

- אם L הוא אורך הסריג , מקבלים $d = L\,/\,N$ ואז

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda_{\min}} = mN = \frac{Nd}{\lambda}\left(\sin\theta - \sin\theta_0\right) = \frac{L}{\lambda}\left(\sin\theta - \sin\theta_0\right)$$

- כלומר, אורך הסריג קובע את כושר ההפרדה.
- בזויות הפוכות ($\pm\pi/2$) ההפרדה מירבית

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda_{\min}} = \frac{2L}{\lambda}$$



כושר הפרדה

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda_{\min}} = \frac{2L}{\lambda}$$

- אורך הסריג המשמעותי ביותר לכושר ההפרדה שלו, אבל הוא מוגבל מסיבות מעשיות.
- למשל נציב $L = 50$ mm, $\lambda = 0.5$ µm. נקבל כושר הפרדה של 20,000.
- כמובן, קשה לקבל זויות קרובות ל-90^0 בפגיעה ובהחזרה $(\sin\theta - \sin\theta_0)$ ולכן ההפרדה מוגבלת.
- אם אורך הסריג קובע, ניתן לקבל אותה הפרדה גם באינטרפרומטר יאנג, אבל ביעילות ירודה.
- קיימים אמצעים טובים להפרדה טובה יותר.

שגיאות מחזוריות

- זוהי שגיאה נפוצה ביותר בייצור של סריגי עקיפה, המשפיעה על איכות הקרן (אך לא על ההפרדה).
- שגיאה זו גורמת לחיזוק של השיאים המשניים.
- נניח שהשגיאה חוזרת כל קו מספר q, כמו למשל כאשר יש פגם בבורג..
- המרחק בין השגיאות הוא qd ועל כן נקבל q סדרים נוספים שחלקם מסוגלים להפריע לסדרים הראשיים.
- נניח שמיקומי הקוים x_p מכילים שגיאה הרמונית קטנה ($\varepsilon \ll 1$)

$$x_p = pd + \varepsilon \sin 2\pi p / q$$

- פונקצית ההעברה של הסריג היא

$$f(x) = \sum_p \delta\left(x - x_p\right) = \sum_p \delta\left(x - pd - \varepsilon \sin 2\pi p / q\right)$$

- שהתמרת פוריה שלה היא

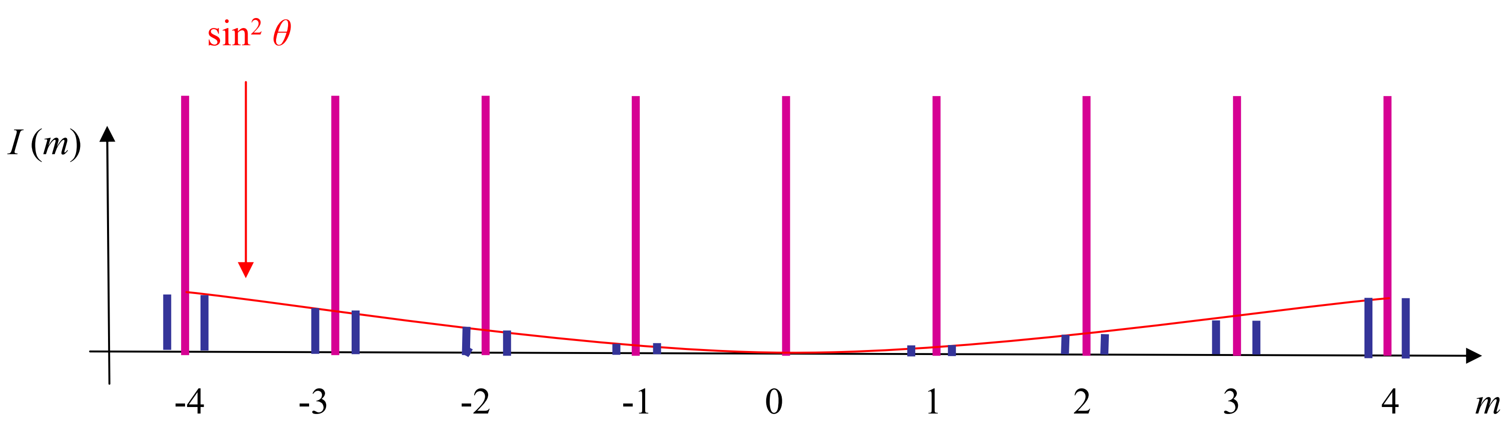
$$F(u) = \sum_p \exp\left[-iu\left(pd + \varepsilon \sin 2\pi p / q\right)\right] \approx \sum_p \left[\exp\left(-iupd\right)\left(1 - iu\varepsilon \sin 2\pi p / q\right)\right]$$

- נפרק את הסינוס להפרש מעריכים ונקבל אוסף סדרי עקיפה

$$F(u) = \sum_m \delta\left(u - \frac{2\pi m}{d}\right) - \frac{u\varepsilon}{2} \sum_m \delta\left[u - \frac{2\pi}{d}\left(m + \frac{1}{q}\right)\right] + \frac{u\varepsilon}{2} \sum_m \delta\left[u - \frac{2\pi}{d}\left(m - \frac{1}{q}\right)\right]$$

שגיאה מחזורית

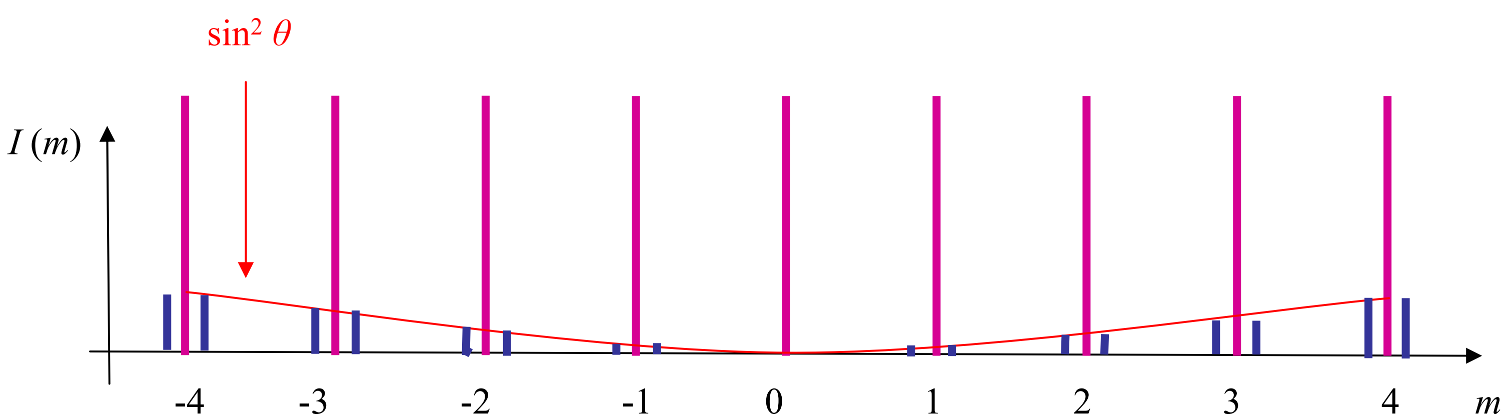
- שגיאה מחזורית נצפית גם בחומר דחיס, כמו בתא אקוסטו-אופטי.
- תנועת אטומים בגביש בעקבות רעש תרמי נכתבת כסכום רכיבים הרמוניים, פונונים. לכל פונון סדר שגיאה משלו. סכומם יוצר רקע מטושטש והרחבה כביכול לקוי עקיפת רנטגן של גביש: אפקט דבאיי-וולר.
- בסגסוגות נוצרים לעיתים בתוך תא היחידה הרכבים היוצרים סריגי-על. בעקיפת רנטגן הם נראים כשיאי שגיאה מחזורית. בחומרים מגנטיים כמו MnF_2 הספינים האטומיים מסודרים בסריג השונה מסריג הגביש כולו. בעקיפת ניטרונים רואים סדרים אלו בגלל האינטרקציה שלהם עם הספינים. סדרי שגיאה אלו אינם מופיעים בעקיפת רנטגן שאינה רגישה לספין.
- בגלי רדיו קיים אפנון תדר, שהאפקט שלו כשל שגיאה מחזורית, ויותר בתחום התדר פסי צד.



עקיפה משגיאות מחזוריות

$$F(u)=\sum_m \delta\left(u-\frac{2\pi m}{d}\right)-\frac{u\varepsilon}{2}\sum_m \delta\left[u-\frac{2\pi}{d}\left(m+\frac{1}{q}\right)\right]+\frac{u\varepsilon}{2}\sum_m \delta\left[u-\frac{2\pi}{d}\left(m-\frac{1}{q}\right)\right]$$

- לשיאים העיקריים נוספים שיאי השגיאה המחזורית $m \pm 1/q$.
- לצדי כל שיא יש שיאים משניים בעוצמה קטנה פי ε^2.
- השיאים המשניים מרוחקים פי $1/q$ מהעיקריים במרחב ההפכי.
- עוצמתם הולכת וגדלה מן המרכז והלאה לפי $\sin^2\theta$.



יעילות עקיפה

- עד כה הסתכלנו על פונקצית ההתאבכות, שהיא התמרת פוריה של סדרת פונקציות δ המיצגות את מיקומי המפתחים. כעת נכפול התמרה זו בפונקצית העקיפה, שהיא התמרה של מפתח אחד.
- בסריג העברת משרעת המפתחים הם סדקים ברוחב b , שיכול להיות פחות ממרחקם ההדדי d.
- פונקצית העקיפה היא התמרה של סדק כזה: $\psi(u) = b\,\mathrm{sinc}(bu/2)$.
- בסדר מספר m המיקום במרחב ההפכי הוא $u_m = 2m\pi/d$.
- עבור הסדר הראשון פונקצית העקיפה $\psi(u_m)$ מגיעה לשיא כאשר $b = d/2$, כלומר רוחב הסדק הטוב ביותר שווה למחצית המרחק בין הסדקים, מה שמקטין את היעילות.
- הספק האור P_m המגיע לסדרים השונים יחסי לריבוע פונקצית העקיפה $|\psi(u_m)|^2$

$$P_0 \propto d^2/4; \quad P_{\pm 1} \propto d^2/\pi^2; \quad P_{\pm 2} = 0; \quad \cdots \quad b = d/2$$

- אם נציב $b = d$, כל האור יעבור דרך המפתחים ומכאן נקבל את קבוע היחס.

$$P_0' \propto d^2; \quad P_{i\neq 0}' = 0; \quad \cdots \quad b = d$$

- יעילות העקיפה מוגדרת כחלק האור המפוזר לסדר החזק ביותר השונה מאפס.
- כאן מקבלים עבור $b = d/2$

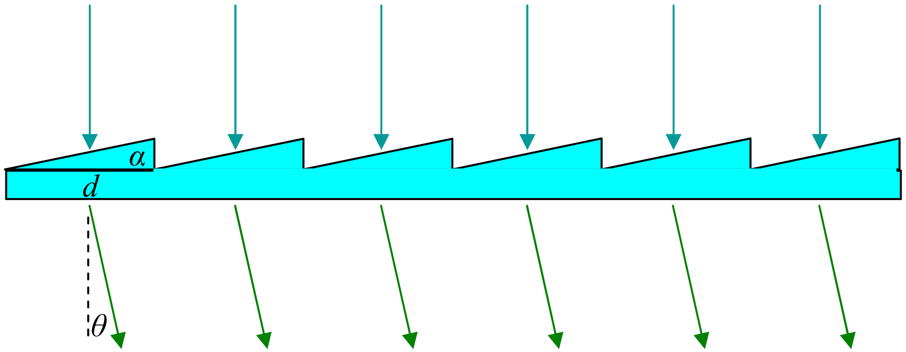
$$P_1/P_0' = \pi^{-2} \approx 0.1$$

- בסריג מופע (לעומת סריג העברה ללא מופע) אפשר לשפר עוד את היעילות.

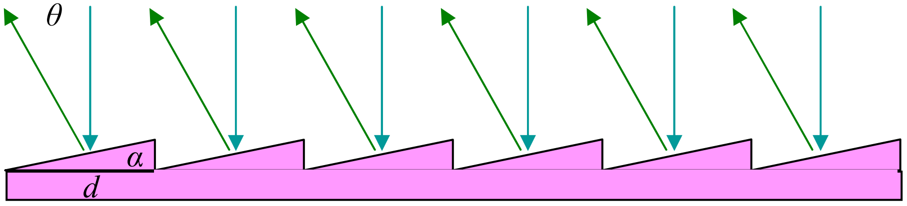
סריג מופע (blazed grating)

- הסריג מיוצר על ידי כלי מיוחד היכול לחרוץ משטחים אופטיים באיכות טובה.
- בסריג ההעברה, זוית הראש של כל מנסרה גורמת להטיה השווה לזוית סדר עקיפה.
- בסריג ההחזרה, כל רכיב הוא מראה קטנה.
- בגלל הכיווניות המועדפת, הסריג מיועד רק לסדר מיוחד אחד ולתדר אחד, ויעילותו יורדת מחוץ לתדר זה.

$$n\lambda = d\sin\theta; \quad \theta = (\mu - 1)\alpha$$



$$n\lambda = d\sin\theta; \quad \theta = 2\alpha$$



בחירת אורך גל ראשי

- נניח גל מקבילי הפוגע בניצב לפני הסריג מוסח בזוית β בהחזרה (החשבון תקף גם בהעברה).
- תוספת המופע לאחר הסריג תהיה $\exp(i k_0 \sin\beta)$.
- כיון שרוחבו של המקטע b תהיה העברתו $g(x) = \mathrm{rect}(x/b)\exp(i k_0 \sin\beta)$. סך כל הסריג יהיה

$$f(x) = g(x) \otimes \sum \delta(x - nd) = \left[\mathrm{rect}(x/b)\exp(ik_0 \sin\beta)\right] \otimes \sum \delta(x - nd)$$

- ההתמרה של פונקצית העברה זו היא

$$\begin{aligned} F(u) &= \left[\mathrm{sinc}(ub/2) \otimes \delta(u - k_0 \sin\beta)\right] \sum \delta(u - 2\pi m/d) \\ &= \mathrm{sinc}\left[b(u - k_0 \sin\beta)/2\right] \sum \delta(u - 2\pi m/d) \end{aligned}$$

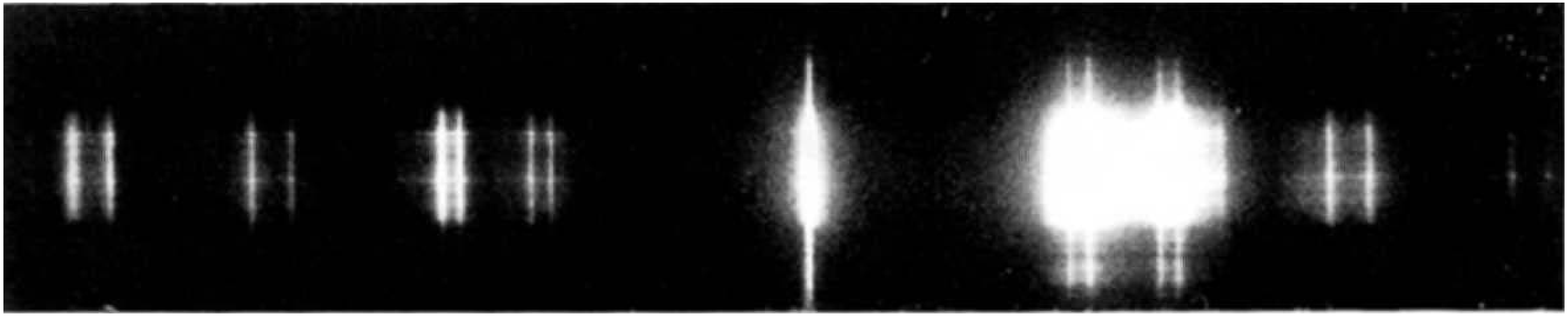
- זוהי הזזה של פונקצית המעטפת מהראשית ל- $k_0 \sin\beta$.
- אם $k_0 \sin\beta = 2\pi m_0/d$ השיא מתמזג עם סדר m_0 (לרוב סדר ראשון).
- כך קובעים את β כדי לקבל את מירב העצמה בסדר מסוים ואורך גל מסוים.
- זהו אורך הגל הראשי (blazing wave length).

יעילות העקיפה

- מהי יעילות העקיפה? בסדר m העוצמה תהיה

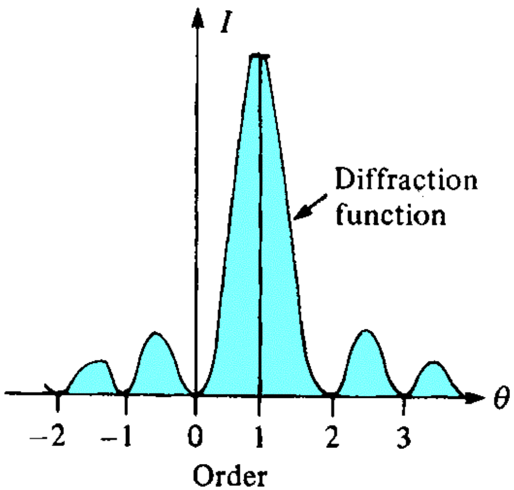
$$I_m = \left| F\left(\frac{2\pi m}{d} \right) \right|^2 = \mathrm{sinc}^2\left[\frac{b\pi}{d}(m - m_0) \right]$$

- במקרה האידיאלי, כאשר רוחב המפתח שווה לפסיעת המפתחים, העצמה מתאפסת עבור כל הסדרים פרט לסדר m. יעילות העקיפה מתקרבת ל-100%.
- בגלל שגודל המפתחים תמיד קטן מעט מן הפסיעה יש סדרים נוספים המורידים מן היעילות.



מספר סדרי עקיפה בסריג.
הקצה העליון והתחתון נחשפו פחות, לצורך הדגשת העוצמות היחסיות.

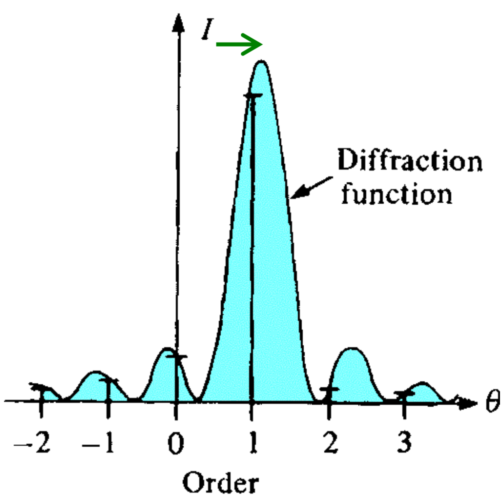
יעילות העקיפה



- אם האור מגיע בוקטור גל אחר k_1, תוספת המופע לאחר הסריג תהיה $\exp\,(i\,k_1 \sin\beta\,)$.
- מציבים בחזרה את ערך הזוית של הסדר הראשי, ומקבלים $k_0 \sin\beta = 2\,\pi\, m_0 / d$

$$F(u) = \mathrm{sinc}\left[b\left(u - k_1 \sin\beta\right)/2\right] \sum \delta\left(u - 2\pi m / d\right)$$

$$I_m = \mathrm{sinc}^2\left[\frac{b\pi}{d}\left(m - m_0 \frac{k_1}{k_0}\right)\right]$$



- הזזת פונקצית העקיפה באורך גל אחר (או בזוית קצת שונה) גורמת שהאפסים שלה לא יתאימו לסדרי העקיפה השונים מהסדר הראשון. לכן סדרים אלו יופיעו, אם כי בעצמה נמוכה.
- בגלל קרבת אורך הגל של האור לפרטי הסריג, התורה הסקלרית של העקיפה אינה תקפה לחלוטין ומופיע קיטוב חלקי באור המפוזר.